Введение

Проблема ускорения сходимости бесконечных кратных рядов и интегралов с помощью методов экстраполяции в последнее время вызывает значительный интерес. Первая работа по ускорению сходимости кратных рядов была опубликована Чизхолмом [1]. В этой работе Чизхолм определил диагональные аппроксиманты Паде для двойных рядов вида . Рассматриваемые в [1] «диагональные» аппроксиманты имеют вид . Недиагональные аппроксиманты  были позднее определены Грейвсом-Моррисом, Хьюзом Джонсом и Мейкинсоном. Диагональные аппроксиманты из [1] были обобщены на степенные ряды от  переменных Чизхолмом и Макьюэном, а недиагональные аппроксиманты из были обобщены на  переменных Хьюзом Джонсом. Аппроксиманты Паде общего порядка для кратных степенных рядов были определены Левиным [2] и далее развиты Кайтом.

Общее обсуждение ускорения сходимости бесконечных двойных рядов и интегралов было представлено в работе Левина [3]. Cтатья Грайфа и Левина [4] объединяет общую идею из [3] с подходом, основанным на -преобразовании для одномерных бесконечных интегралов и -преобразовании для одномерных бесконечных рядов, предложенных Левиным и Сиди. Ранее, Сиди уже предложил подход, в котором -преобразование используется последовательно для суммирования кратных рядов. Тот же подход может быть применен для вычисления кратных интегралов с бесконечными пределами.

Рассмотрим некоторые детали подхода, основанного на асимптотических разложениях и обобщенном процессе экстраполяции Ричардсона, которые приводят к - и -преобразованиям

-трансформациядля одномерных бесконечных интегралов

Обсудим-преобразование для интегралов с бесконечными пределами. Начнём с определения двух классов функций, которые обозначим как  и .

*Определение 1* [5]: функция принадлежит множеству , если она бесконечно дифференцируема для всех  и имеет асимптотическое разложение типа Пуанкаре вида:

а её производные имеют асимптотические разложения, полученные формальным почленным дифференцированием разложения (1).

Если, кроме того,  в (1), то говорят, что строго принадлежит . Здесь  в общем случае комплексное.

*Определение 2* [5]: функция *,* бесконечно дифференцируемая на , принадлежит множеству , если она удовлетворяет линейному однородному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) порядка :

где

Следующая теорема, приведенная в [6], является основой для -преобразования.

*Теорема 1*: пусть — функция из , интегрируемая на бесконечности. Предположим также, что:

и что

где

Определим:

Тогда:

где – целые числа, а

Если, кроме того, строго для некоторых чисел , то:

Равенство в (8) достигается, когда целые числа, среди которых берется максимум, различны.

Наконец, поскольку , они имеют асимптотическое разложение вида:

Важно:

1. если c , то , и условие невырожденности выполняется автоматически;
2. всегда ;
3. для выполняется точное равенство ;
4. в большинстве примеров равенство выполняется для всех *k*;
5. параметры и функции зависят только от в ОДУ и одинаковы для всех решений , удовлетворяющих условиям теоремы.

Аналогия с [5]:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. .

*Определение 3* [5]: выберем возрастающую последовательность , стремящуюся к бесконечности. Пусть – вектор неотрицательных целых чисел. Тогда приближение к определяется системой уравнений:

Здесь представляют собой дополнительные () вспомогательные неизвестные. В формуле (10) принято, что , поэтому . Этот обобщённый процесс экстраполяции Ричардсона (), генерирующий ​, будем называть -преобразованием или просто -преобразованием.

Данное определение *D*-преобразования отличается от оригинального определения из [13] тем, что были заменены их известными верхними границами . Поскольку это не требует знания точных значений , метод становится более удобным для пользователя. Однако если известны точные значения  или их верхние границы, следует использовать их и заменить  в (10) на , так как это снижает вычислительные затраты при заданном уровне точности. В некоторых важных случаях, связанных с интегральными преобразованиями, значения   могут быть легко определены.

Для применения -преобразования необходимо определить значение . Это можно сделать одним из двух способов:

1. методом проб и ошибок – начать тест с , и увеличивать до достижения удовлетворительного ускорения сходимости;
2. математической оценкой – использовать эмпирические правила: если , то:
3. ;

Если  и/или некоторые её производные бесконечное число раз обращаются в ноль на бесконечности, можно соответствующим образом выбрать точки , чтобы исключить некоторые члены  из (7). Это сокращает вычислительные затраты и повышает численную устойчивость. Данный подход был предложен в работах Сиди. Полученные методы обозначаются как -преобразования. Альтернативный подход - -преобразование является одним из наиболее эффективных методов для вычисления осциллирующих бесконечных интегралов.

-преобразование для одномерных бесконечных рядов

Рассмотрим *d*(*m*)-преобразование, предложенное в работе [6], для ускорения сходимости бесконечных рядов. Начнём с определения класса функций .

*Определение 4* [5]: функция , определённая для всех при котором , принадлежит множеству , если она имеет асимптотическое разложение Пуанкаре вида:

Если, кроме того,  в (11), то говорят, что строго принадлежит ​. Здесь  может быть комплексным.

Отметим также, что от функций не требуется дифференцируемости, поэтому .

Определим семейство последовательностей , которое является аналогом .

*Определение 5* [5]: Последовательность принадлежит множеству , если она удовлетворяет линейному однородному разностному уравнению порядка  вида:

где . Здесь , и .

Следующая теорема, приведённая в [6], является дискретным аналогом теоремы (3).

*Теорема 2*: пусть последовательность принадлежит , и пусть ряд ​ сходится. Предположим также, что:

и что:

где

Определим:

Тогда:

где – целые числа, а функции . Более того, если строго для некоторых целых , то:

Равенство в (18) достигается, когда целые числа, среди которых берется максимум, различны.

Наконец, поскольку , они имеют асимптотическое разложение вида:

Важно:

1. из (15) следует, что если , тогда и только тогда, когда  ​ строго; таким образом, если  ​ при , то , это означает, что при  для всех  условие (14) выполняется автоматически;
2. из (18) следует, что всегда;
3. аналогично, для имеем точно;
4. для многих примеров, которые были рассмотрены, равенство в (18) выполняется для всех ;
5. целые числа и функции в (17) зависят только от в разностном уравнении (12); таким образом, они одинаковы для всех решений , уравнения (12), удовлетворяющих (13), для которых ряд сходится;
6. из (13) и (18) также следует, что .

Аналогия с [5]:

1. ;
2. ;
3. ;
4. , ;
5. .

Проводя аналогию, видим, что принадлежит . Переменная здесь дискретна и принимает значения .

Исследования [5] показывают, что требование является наиболее важным среди условий теоремы (13). Остальные условия, а именно (13)-(15) обычно выполняются автоматически. Поэтому для проверки принадлежности (где ) множеству достаточно убедиться, что .

Хотя теорема (13) сформулирована для последовательностей, для которых ряд ​ сходится, соотношение (17)-(19) может выполняться и для расходящихся рядов, если их антипредел  определён в некотором смысле суммируемости.

Заменив каждое  в (17) его верхней оценкой , добавив  к обеим частям (17) и применив формулировку определения , можно определить -преобразование.

*Определение 6* [5]: выберем последовательность целых чисел ​, где . Пусть  — неотрицательные целые числа. Тогда приближение  к определяется системой линейных уравнений:

Здесь представляют собой дополнительные неизвестные. В формуле (20) принято, что , поэтому . Этот процесс обобщённой экстраполяции Ричардсона (), генерирующий ​, называется -преобразованием или просто *d*-преобразованием (для краткости).

Это определение -преобразования было дано в [8] и отличается от исходного определения в [13] заменой на их верхние оценки . Такой подход более удобен для пользователя, поскольку не требует знания точных значений . Если же эти значения известны, их следует использовать для повышения точностей вычислений.

Для применения -преобразования необходимо определить значение . Это можно сделать одним из двух способов:

1. методом проб и ошибок – начать тест с , и увеличивать до достижения удовлетворительного ускорения сходимости;
2. математической оценкой – использовать эмпирические правила: если , то:
3. ;

Псевдокод для -преобразования для одномерных рядов представлен на *Рисунке 1*, а пример его применения представлен на *Рисунке 2*.

**Вход**: ряд S в виде - последовательность, удовлетворяющая разностному уравнению (12), – порядок преобразования (обосновано в *Теореме 2*), – возрастающая последовательность целых чисел для выбора точек (*Определение 6*)

**Выход**: - аппроксимация суммы ряда (формула (20), *Определение 6*)

Получить , и

#Проверка условий *Теоремы 2* (стр. 6, условия (13)-(15))

**if** не удовлетворяет условиям *Теоремы 2*: #**Условия (13)-(15)**

**return** «Ряд не удовлетворяет условиям *Теоремы 2*»

**else**:

**for** от до ():

Вычислить частичные суммы (по формуле для частичных сумм (16))

**for** от 1 до :

Вычислить конечные разности #***Определение 5***

Сформировать уравнение (20)

Решить систему линейных уравнений (20) относительно и

**return**

*Рисунок 1*. Псевдокод для -преобразования для одномерных рядов.

**Вход**: , ,

**Выход**:

*Рисунок 2*. Пример применения -преобразования для одномерных рядов.

Последовательные преобразования для многомерных интегралов и рядов

Вычисление многомерных интегралов и рядов может быть выполнено с помощью последовательного применения - и -преобразований при определённых условиях. Такой подход был впервые предложен в работе [15] для двойных бесконечных рядов, где он также был теоретически обоснован и проиллюстрирован на примерах. Кратко опишем данный метод.

Чтобы упростить изложение для дальнейшего использования, введём некоторые обозначения:

*Последовательное -преобразование для -мерных интегралов*. Рассмотрим -мерный интеграл , где и обозначено , и определим:

Тогда . Предположим теперь, что для каждого  и фиксированных ​ функция  как функция ​ принадлежит классу  для некоторого целого ​. (Это предположение, по-видимому, выполняется, когда  как функция переменной ​ — при фиксированных остальных переменных — принадлежит классу .) Это означает, что  может быть вычислено путём применения -преобразования к интегралу ​. Таким образом, вычисление  завершается применением -преобразования к интегралу ​.

Очень легко увидеть, что это предположение автоматически выполняется, когда , где  для некоторых целых чисел . Это служит мотивацией для последовательного применения -преобразования.

В качестве примера рассмотрим функцию , где  — константа с ,  для некоторого положительного целого , причем  для всех достаточно больших . (Например,  для или .) Во-первых,  принадлежит  как функция  (при фиксированном *y*) и  как функция  (при фиксированном ). Используя соотношение  для , можно показать, что:

Применяя лемму Ватсона (см. [14]) к этому интегралу, получаем, что  имеет асимптотическое разложение вида:

Это означает, что .

*Последовательное -преобразование для -мерных рядов*. Последовательное применение -преобразования для вычисления -мерных бесконечных рядов аналогично использованию -преобразования для s-мерных интегралов. Рассмотрим -мерный бесконечный ряд  и определим:

Таким образом, .

*Лемма 1* [14]: предположим, что для каждого  и фиксированных , применяя последовательность  принадлежит классу  для некоторого целого ​(это предположение, по-видимому, выполняется, когда  для каждого  и фиксированных . Следовательно, может быть вычислено путём применения -преобразования к ряду , вычисление  завершается применением -преобразования к ряду .

Мотивация для этого подхода к суммированию -мерных рядов заключается в том, что данное предположение автоматически выполняется, когда , где  для некоторых целых чисел . Псевдокод для последовательного -преобразования для -мерных рядов представлен на *Рисунке 3*, а пример его применения представлен на *Рисунке 4*.

**Вход**: -мерный массив элементов , вектор порядков преобразований , двумерный массив - последовательности точек для каждой размерности

**Выход**: ускоренная сумма (после преобразований)

Получить , и

Инициализировать

**for** от до :

**if** **:**

**return** «Ошибка: размерность k не удовлетворяет условиям»

**else**:

#Применить -преобразовани (*Лемма 1***)**

**for** каждого фиксированного набора :

Вычислить частичные суммы (аналогично формуле 16)

Вычислить конечные разности требуемых порядков #***Определение 5***

Построить и решить систему уравнений (аналогичную (20))

Результат записать в

**return**

*Рисунок 3*. Псевдокод для последовательного -преобразования для -мерных рядов.

**Вход**: , [[5, 10], [4, 8]]

**Выход**:

*Рисунок 4*. Пример применения последовательного -преобразования для -мерных рядов.

Рассмотрим пример двойного ряда ​, где , ​для некоторого положительного целого *r*, и  для всех достаточно больших . (Например,  для  - *k*-го многочлена Лежандра.) Во-первых,  при фиксированном , а  при фиксированном . Используя соотношение  для , можно показать, что:

Применяя лемму Ватсона (см. [14]) к этому интегралу, можно увидеть, что  имеет асимптотическое разложение:

Это означает, что .

Факториальное -преобразование

Путём перезаписи асимптотических разложений функций  из (19) в других формах, получаем другие варианты -преобразования [11]. Например, произвольный асимптотический ряд при  можно также представить в виде  при , где  и ​. Здесь  для , ​, и так далее. Для каждого  коэффициент ​ однозначно определяется значениями .

Если теперь переписать асимптотические разложения  при  в форме ​ при  и продолжить аналогичным образом, можно определить факториальное -преобразование для бесконечных рядов с помощью линейных уравнений:

И для бесконечных последовательностей с помощью линейных уравнений:

Псевдокод для факториального -преобразования представлен на *Рисунке 5*, а пример его применения представлен на *Рисунке 6*.

**Вход**: ряд S в виде – последовательность с асимптотикой вида (19), – порядок преобразования (*Теорема 2*), – параметр сдвига, – последовательность точек (*Определение 6*)

**Выход**: приближение (формула (21)

Получить , и

#Проверить соответствие асимптотики

**if** не соответствует формуле (19):

**return** "Ошибка: неверный тип асимптотики"

**else**:

**for** от до ():

Вычислить частичные суммы (аналогично формуле (16))

**for** от 0 до :

Вычислить факториальные члены из (21)

Сформировать уравнение (21)

Решить систему линейных уравнений (21) относительно и

**return**

*Рисунок 5*. Псевдокод для факториального -преобразования.

**Вход**: , ,

**Выход**:

*Рисунок 6*. Пример применения факториального -преобразования.

-трансформация

Метод, называемый -преобразованием, был предложен Хомейером [18] для ускорения сходимости рядов Фурье по синусам и косинусам. Рассмотрим это преобразование, так как оно является частным случаем  и вариантом **-**преобразования.

Пусть дан ряд Фурье:

а его частичные суммы имеют вид:

Тогда приближение  к сумме этого ряда определяется через линейную систему:

где

а - некоторая фиксированная константа. Здесь ​и ​ — дополнительные вспомогательные неизвестные. Хомейер предложил эффективный рекуррентный алгоритм для реализации -преобразования, отличающийся высокой экономичностью.

Однако у этого преобразования есть два недостатка [11]:

1. Ограниченное применение: класс ряд рядов Фурье, для которых метод работает успешно, довольно узок. Это видно при сравнении уравнений (30) с определяющими уравнениями для ​:

где при специальном выборе , а именно . Таким образом, ​ и ​ используют практически одинаковое количество членов ряда .

Уравнения в (30) сразу же показывают, что -преобразование может быть эффективным, когда

то есть, когда  связана с функцией

Такая ситуация возможна только тогда, когда  и   оба принадлежат классу . Учитывая это, становится ясно, что, если хотя бы одна из последовательностей  или   (или обе) принадлежат классу  при , -преобразование перестаёт быть эффективным. В отличие от этого, преобразование при подходящем значении  остаётся эффективным, как упоминалось ранее.

Псевдокод для последовательного -преобразования представлен на *Рисунке 7*, а пример его применения представлен на *Рисунке 8*.

**Вход**: ряд Фурье (определение перед (30)), - порядок преобразования, – параметр сдвига, коэффициенты , (следует из условия эффективности-преобразования)

**Выход**: приближение (30)

Получить , , и

#Проверить ,

**if** не выполняется:

**return** "Ошибка: коэффициенты не ∈ "

**else**:

**for** от до :

Вычислить частичную сумму ряда Фурье

Вычислить (аналогично (31))

Сформировать уравнение (30)

Решить систему из уравнений относительно , , (30)

**return**

*Рисунок 7*. Псевдокод для -преобразования.

**Вход**: *, ,* ,

**Выход**:

*Рисунок 8*. Пример применения -преобразования.

В качестве примера рассмотрим ряд косинусов , где  — полиномы Лежандра. Поскольку , получаем, что . В этом случае:

* -преобразование может быть применено напрямую к ;
* -преобразование с использованием комплексного подхода также применимо и требует примерно вдвое меньше вычислений по сравнению с прямым методом;
* -преобразование неэффективно.

Из определения  очевидно, что предполагается доступность  и . В таком случае, как объяснялось ранее, -преобразование с (которое является ничем иным, как преобразованием Левина) в сочетании с комплексным подходом обеспечивает требуемую точность при примерно вдвое меньших вычислительных затратах по сравнению с -преобразованием, когда последнее применимо. Разумеется, лучшая устойчивость и точность достигаются при использовании -преобразования с вблизи точек сингулярности.

Заключение

Полученные преобразования могут быть применены к широкому классу последовательностей, включая, среди прочего, линейные и общие линейные последовательности, где обычно применяется -алгоритм. Они были созданы на основе строгого анализа асимптотических разложений хвостов бесконечных рядов. В некоторых частных случаях приближения, полученные с помощью -преобразования, совпадают с теми, которые даёт преобразование Шенкса.

Список литературы

1. Rational approximants defined from double power series // Math. Comp. // J. S. R. Chisholm. – 1973. – P. 941-848.
2. General Rational approximants in N variables // Approx. Theory // D. Levin. – 1976. – P. 1-8.
3. On accelerating the convergence of infinite double series and integrals // Math. Comp. // D. Levin. – 1980. – P. 1331-1980.
4. The -transformation for infinite double series and the -transformation for infinite double integrals. // Math. Comp. – 1998. – P. 695-714.
5. Extrapolation Methods for infinite multiple series and integrals // Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering vol. 1. // D. Levin, A. Sidi – 2001. – P. 167-184.
6. Two new classes of nonlinear transformations for accelerating the convergence of infinite integrals and series // Appl. Math. Comp. // D. Levin, A. Sidi – 1975. – P. 175-215.
7. Further convergence and stability results for the generalized Richardson extrapolation process with and application to the -transformation for infinite integrals // Comp. Appl. Math. // A. Sidi. – 1999. – P. 153-167.
8. An algorithm for a generalization of the Richardson extrapolation process // SIAM J. Numer. Anal. // W. F. Ford and A. Sidi. – 1987. – P. 1212-1232.
9. Exponential function approximation to Laplace transform inversion and development of non-linear methods for accelerating the convergence of infinite integrals and series // PhD thesis, Tel Aviv University // I. M. Longman. – 1977.
10. Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // Math. Comp. // D. Levin. – 1975. – P. 371-388, 1331-1345.
11. Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications // Cambridge University Press // A. Sidi – 2003. – P. 121-157, 238-250, 253-261, 363-371.
12. An algorithm for a special case of a generalization of the Richardson extrapolation process // Numer. Math. // A. Sidi. – 1982. – P. 223-233.
13. Acceleration of linear and logarithmic convergence // SIAM J. Numer. Anal. // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1979. – P. 223-240.
14. Numerical comparisons of nonlinear convergence accelerators // Math. Comp. // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1982. – P. 481-499.
15. A new method for deriving Pade approximants for some hypergeometric functions // J. Comp. Appl. Math. // A. Sidi. – 1981. – P. 37-40.
16. A Maple package for transforming sequences and functions // Comput. Phys. Comm. // J. Grotendorst. – 1991. – P. 325-342.
17. A Levin-type algorithm for accelerating the convergence of Fourier series // Numer. Algorithms // H. H. H. Homeier. – 1992. – P. 245-254.