Введение

Проблема ускорения сходимости бесконечных кратных рядов и интегралов с помощью методов экстраполяции в последнее время вызывает значительный интерес. Первая работа по ускорению сходимости кратных рядов была опубликована Чизхолмом [1]. В этой работе Чизхолм определил диагональные аппроксиманты Паде для двойных рядов вида . Рассматриваемые в [1] «диагональные» аппроксиманты имеют вид . Недиагональные аппроксиманты  были позднее определены Грейвсом-Моррисом, Хьюзом Джонсом и Мейкинсоном. Диагональные аппроксиманты из [1] были обобщены на степенные ряды от *N* переменных Чизхолмом и Макьюэном, а недиагональные аппроксиманты из были обобщены на *N* переменных Хьюзом Джонсом. Аппроксиманты Паде общего порядка для кратных степенных рядов были определены Левиным [2] и далее развиты Кайтом.

Общее обсуждение ускорения сходимости бесконечных двойных рядов и интегралов было представлено в работе Левина [3]. Cтатья Грайфа и Левина [4] объединяет общую идею из [3] с подходом, основанным на *D*-преобразовании для одномерных бесконечных интегралов и *d*-преобразовании для одномерных бесконечных рядов, предложенных Левиным и Сиди. Ранее, Сиди уже предложил подход, в котором *d*-преобразование используется последовательно для суммирования кратных рядов. Тот же подход может быть применен для вычисления кратных интегралов с бесконечными пределами.

Рассмотрим некоторые детали подхода, основанного на асимптотических разложениях и обобщенном процессе экстраполяции Ричардсона, которые приводят к *D*- и *d*-преобразованиям

*D(m)*-трансформациядля одномерных бесконечных интегралов

Обсудим *D*-преобразование для интегралов с бесконечными пределами. Начнем с определения двух классов функций, которые мы обозначаем *A(γ)* и *B(m)*.

Определение [5]: функция *α*(*x*) принадлежит множеству *A(γ)*, если она бесконечно дифференцируема для всех  и имеет асимптотическое разложение типа Пуанкаре вида:

а её производные имеют асимптотические разложения, полученные формальным почленным дифференцированием разложения (1).

Если, кроме того,  в (1), то говорят, что *α(x)* строго принадлежит *A(γ)*. Здесь *γ* в общем случае комплексное.

Определение [5]: функция *f(x),* бесконечно дифференцируемая на (*a*, ∞), принадлежит множеству *B(m)*, если она удовлетворяет линейному однородному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) порядка *m*:

где

Следующая теорема, приведенная в [6], является основой для *D*-преобразования.

Теорема: пусть *f*(*x*) — функция из *B(m)*, интегрируемая на бесконечности. Предположим также, что:

и что

где

Определим:

Тогда:

где – целые числа, а

Если, кроме того, строго для некоторых чисел , то:

Равенство в (8) достигается, когда целые числа, среди которых берется максимум, различны.

Наконец, поскольку , они имеют асимптотическое разложение вида:

Важно:

1. если c , то , и условие невырожденности выполняется автоматически;
2. всегда ;
3. для выполняется точное равенство ;
4. в большинстве примеров равенство выполняется для всех *k*;
5. параметры и функции зависят только от в ОДУ и одинаковы для всех решений *f*(x), удовлетворяющих условиям теоремы.

Аналогия с GREP [5]:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. .

Определение [5]: выберем возрастающую последовательность , стремящуюся к бесконечности. Пусть – вектор неотрицательных целых чисел. Тогда приближение к определяется системой уравнений:

Здесь представляют собой дополнительные (*N*) вспомогательные неизвестные. В формуле (10) принято, что , поэтому . Этот обобщённый процесс экстраполяции Ричардсона (GREP), генерирующий ​, мы будем называть *D*(*m*)-преобразованием или просто *D*-преобразованием.

Данное определение *D*-преобразования было дано в [25] и отличается от оригинального определения из [13] тем, что мы заменили  их известными верхними границами *k*+1. Поскольку это не требует знания точных значений , метод становится более удобным для пользователя. Однако если нам известны точные значения  или их верхние границы, следует использовать их и заменить  в (10) на , так как это снижает вычислительные затраты при заданном уровне точности. В некоторых важных случаях, связанных с интегральными преобразованиями, значения   могут быть легко определены.

Для применения *D*(*m*)-преобразования необходимо определить значение *m*. Это можно сделать одним из двух способов:

1. методом проб и ошибок – начать тест с *m*=1, и увеличивать m до достижения удовлетворительного ускорения сходимости;
2. математической оценкой – использовать эмпирические правила: если , то:
3. ;

Если *f*(*x*) и/или некоторые её производные бесконечное число раз обращаются в ноль на бесконечности, можно соответствующим образом выбрать точки , чтобы исключить некоторые члены  из (7). Это сокращает вычислительные затраты и повышает численную устойчивость. Данный подход был предложен в работах Сиди. Полученные методы обозначаются как -преобразования. Альтернативный подход - -преобразование является одним из наиболее эффективных методов для вычисления осциллирующих бесконечных интегралов.

*d*(*m*)-преобразование для одномерных бесконечных рядов

Рассмотрим *d*(*m*)-преобразование, предложенное в работе [6], для ускорения сходимости бесконечных рядов. Начнём с определения класса функций .

Определение [5]: функция , определённая для всех при котором , принадлежит множеству , если она имеет асимптотическое разложение Пуанкаре вида:

Если, кроме того,  в (11), то говорят, что *α*(*x*) строго принадлежит ​. Здесь  может быть комплексным.

Отметим также, что от функций не требуется дифференцируемости, поэтому .

Определим семейство последовательностей , которое является аналогом *B(m)*.

Определение [5]: Последовательность {*an*​}принадлежит множеству , если она удовлетворяет линейному однородному разностному уравнению порядка *m* вида:

где . Здесь , и .

Следующая теорема, приведённая в [6], является дискретным аналогом теоремы (3).

Пусть последовательность {*an*​} принадлежит b(m), и пусть ряд ​ сходится. Предположим также, что:

и что:

где

Определим:

Тогда:

где – целые числа, а функции . Более того, если строго для некоторых целых , то:

Равенство в (18) достигается, когда целые числа, среди которых берется максимум, различны.

Наконец, поскольку , они имеют асимптотическое разложение вида:

Важно:

1. из (15) следует, что если , тогда и только тогда, когда  ​ строго; таким образом, если  ​ при , то , это означает, что при  для всех  условие (14) выполняется автоматически;
2. из (18) следует, что всегда;
3. аналогично, для имеем точно;
4. для многих примеров, которые мы рассматривали, равенство в (18) выполняется для всех ;
5. целые числа и функции в (17) зависят только от в разностном уравнении (12); таким образом, они одинаковы для всех решений , уравнения (12), удовлетворяющих (13), для которых ряд сходится;
6. из (13) и (18) также следует, что .

Аналогия с GREP [5]:

1. ;
2. ;
3. ;
4. , ;
5. .

Проводя аналогию, видим, что принадлежит . Переменная здесь дискретна и принимает значения .

Исследования [5] показывают, что требование является наиболее важным среди условий теоремы (13). Остальные условия, а именно (13)-(15) обычно выполняются автоматически. Поэтому для проверки принадлежности (где ) множеству достаточно убедиться, что .

Хотя теорема (13) сформулирована для последовательностей, для которых ряд ​ сходится, соотношение (17)-(19) может выполняться и для расходящихся рядов, если их антипредел  определён в некотором смысле суммируемости.

Заменив каждое *ρk*​ в (17) его верхней оценкой *k*+1, добавив *an*​ к обеим частям (17) и применив формулировку определения GREP, мы можем определить *d*-преобразование.

Определение [5]: выберем последовательность целых чисел ​, где . Пусть  — неотрицательные целые числа. Тогда приближение  к определяется системой линейных уравнений:

Здесь представляют собой дополнительные неизвестные. В формуле (20) принято, что , поэтому . Этот процесс обобщённой экстраполяции Ричардсона (GREP), генерирующий ​, называется *d*(*m*)-преобразованием или просто *d*-преобразованием (для краткости).

Это определение *d*-преобразования было дано в [8] и отличается от исходного определения в [13] заменой на их верхние оценки *k*+1. Такой подход более удобен для пользователя, поскольку не требует знания точных значений . Если же эти значения известны, их следует использовать для повышения точностей вычислений.

Для применения *d*(*m*)-преобразования необходимо определить значение *m*. Это можно сделать одним из двух способов:

1. методом проб и ошибок – начать тест с *m*=1, и увеличивать m до достижения удовлетворительного ускорения сходимости;
2. математической оценкой – использовать эмпирические правила: если , то:
3. ;

Последовательные преобразования для многомерных интегралов и рядов

Вычисление многомерных интегралов и рядов может быть выполнено с помощью последовательного применения *D*- и *d*-преобразований при определённых условиях. Такой подход был впервые предложен в работе [15] для двойных бесконечных рядов, где он также был теоретически обоснован и проиллюстрирован на примерах. Кратко опишем данный метод.

Чтобы упростить изложение для дальнейшего использования, введём некоторые обозначения:

*Последовательное D-преобразование для s-мерных интегралов*. Рассмотрим s-мерный интеграл , где и обозначено , и определим:

Тогда . Предположим теперь, что для каждого *k* и фиксированных ​ функция  как функция ​ принадлежит классу  для некоторого целого ​. (Это предположение, по-видимому, выполняется, когда  как функция переменной ​ — при фиксированных остальных переменных — принадлежит классу .) Это означает, что мы можем вычислить , применяя -преобразование к интегралу ​. Таким образом, вычисление  завершается применением -преобразования к интегралу ​.

Очень легко увидеть, что это предположение автоматически выполняется, когда , где  для некоторых целых чисел . Это служит мотивацией для последовательного применения *D*-преобразования.

В качестве примера рассмотрим функцию , где *a* — константа с ,  для некоторого положительного целого *r*, причем  для всех достаточно больших *y*. (Например,  для или .) Во-первых,  принадлежит  как функция *x* (при фиксированном *y*) и  как функция *y* (при фиксированном *x*). Используя соотношение  для , можно показать, что:

Применяя лемму Ватсона (см. [14]) к этому интегралу, получаем, что  имеет асимптотическое разложение вида:

Это означает, что .

*Последовательное d-преобразование для s-мерных рядов*. Последовательное применение *d*-преобразования для вычисления s-мерных бесконечных рядов аналогично использованию *D*-преобразования для s-мерных интегралов. Рассмотрим s-мерный бесконечный ряд  и определим:

Таким образом, . Предположим, что для каждого *k* и фиксированных , применяя последовательность  принадлежит классу  для некоторого целого ​. (Это предположение, по-видимому, выполняется, когда  для каждого *k* и фиксированных . Следовательно, мы можем вычислить , применяя -преобразование к ряду , а вычисление  завершается применением -преобразования к ряду .

Мотивация для этого подхода к суммированию s-мерных рядов заключается в том, что данное предположение автоматически выполняется, когда , где  для некоторых целых чисел .

Рассмотрим пример двойного ряда ​, где , ​для некоторого положительного целого *r*, и  для всех достаточно больших *k*. (Например,  для  - *k*-го многочлена Лежандра.) Во-первых,  при фиксированном *k*, а  при фиксированном *j*. Используя соотношение  для , можно показать, что:

Применяя лемму Ватсона к этому интегралу, можно увидеть, что  имеет асимптотическое разложение:

Это означает, что .

Факториальное d(m)-преобразование

Путем перезаписи асимптотических разложений функций  из (19) в других формах, мы получаем другие варианты *d*-преобразования [11]. Например, произвольный асимптотический ряд при *n*→∞ можно также представить в виде  при  *n*→∞, где  и ​. Здесь  для , ​, и так далее. Для каждого *i* коэффициент ​ однозначно определяется значениями .

Если теперь переписать асимптотические разложения  при *n*→∞ в форме ​ при n→∞*n*→∞ и продолжить аналогичным образом, можно определить факториальное *d*(*m*)-преобразование для бесконечных рядов с помощью линейных уравнений:

и для бесконечных последовательностей с помощью линейных уравнений:

Частные случаи d(1)-трансформации

*d(1)-трансформация* [11]. Заменим  в (21) на и для упрощения положим . При эти уравнения принимают вид:

где *n* — натуральное число, а *ρ* обозначает *ρ*1​. Эти уравнения можно решить относительно ​ (для произвольных *Rl*​) очень просто и эффективно с помощью *W*-алгоритма из [12] следующим образом:

Два важных метода экстраполяции - *–*преобразование Левина и 𝒮*-*преобразованиеСиди. Эти методы являются нелинейными и предназначены для ускорения сходимости последовательностей, которые могут быть представлены в виде асимптотических рядов. Они особенно полезны для последовательностей, которые сходятся медленно или расходятся.

*– трансформация Левина*. Это преобразование основано на идее устранения главных членов асимптотического разложения последовательности, чтобы улучшить точность оценки её предела. Если выбрать в (21), то получим [11]:

Полученное *d(1)*-преобразование совпадает с известными *t*- и *u*-преобразованиями Левина, где *ρ*=0и *ρ*=1 соответственно. Обозначим в (24) как Тогда имеет следующий явный вид, приведённый в [10]:

Сравнительное исследование Смита и Форда [14], [15] показало, что преобразования Левина исключительно эффективны для суммирования широкого класса бесконечных рядов , где .

Левин рассмотрел три различных варианта выбора  и определил три различных преобразования последовательностей:

1. = (*t*-преобразование);
2. = (*u*-преобразование);
3. = (*v*-преобразование).

Левин в своей статье [10], а также Смит и Форд в [14] и [15] (где они представили исчерпывающее сравнительное исследование методов ускорения) пришли к выводу, что *u*- и *v*-преобразования эффективны для всех трёх типов последовательностей, тогда как *t*-преобразование эффективно только для линейных и факториальных последовательностей. [На самом деле, все три преобразования являются наилучшими методами ускорения сходимости для знакопеременных рядов .]

Алгебраические свойства [11]:

1. Если положить = (*u*-преобразование) в (25), то можно заметить, что:

где второе равенство выполняется при . Из (26) видно, что =, где  — последовательность, полученная с помощью преобразования Лубкина.

1. Следующая теорема касается ядра u-преобразования, а также, как частный случай, ядра преобразования Лубкина.

Теорема: пусть ​ получено с помощью *u*-преобразования на последовательности {*Am*​}. Тогда ​ для всех и фиксированного *n*, если и только если *Am*​​ имеет вид:

где , , .

1. Смит и Форд [14] показали, что семейство последовательностей частичных сумм ряда Эйлера содержится в ядре *u*-преобразования.

Теорема: пусть , где ,  — неотрицательное целое число, а , пусть ​ — результат применения *u*-преобразования к последовательности {*Am*​}. Если , то для всех *j* выполняется равенство , где .

Для вычисления преобразований ​ можно использовать несколько подходов:

1. Прямое применение формулы (25);
2. Поскольку -преобразование является GREP(1), для его вычисления удобно использовать *W*-алгоритм, для этого необходимо задать: , ,
3. Рекуррентный алгоритм HURRY, включающий следующие шаги:
4. инициализация (для ):

1. рекуррентное вычисление (для ):

где обозначает , либо .

1. финальное вычисление:

при этом , такая нормализация предотвращает чрезмерный рост значений и при увеличении n.

1. Модификация Венигера. Венигер предложил расширение -преобразования, заменив *ri* в (24) на (*r*+*α*)*i* для некоторого фиксированного *α*. Это приводит к замене множителей *Jn*−1 и (*J*+*i*)*n*−1 в числителе и знаменателе (25) на (*J*+*α*)*n*−1 и (*J*+*α*+*i*)*n*−1 соответственно. Влияние параметра *α* на точность аппроксимаций требует дополнительного исследования.

𝒮*–трансформация Сиди*. Если положить , а также заменить на , то уравнения в (21) принимают вид:

Полученное факториальное *d*(1)-преобразование является S-преобразованием Сиди. Обозначим ​ в (28) как ​. Тогда ​ имеет следующую известную явную формулу, приведённую в [16]:

𝒮–преобразование впервые было использовано для суммирования бесконечных степенных рядов. Сравнительное исследование Гротендорста [17] показало, что этот метод является одним из наиболее эффективных для суммирования широкого класса всюду расходящихся степенных рядов.

Выбор весов *ωm*​ и сравнение с  -преобразованием. Параметры *ωm*​​ в 𝒮-преобразовании выбираются аналогично  -преобразованию. Получающиеся преобразования последовательностей обладают схожими с *t*-, *u*- и *v*-преобразованиями численными свойствами, за исключением их меньшей эффективности для логарифмических последовательностей. Для последовательностей из классов линейных и факториальных 𝒮 -преобразование демонстрирует высокую эффективность по сравнению с -преобразованием. Однако для знакопеременных рядов вида  -преобразование остаётся оптимальным выбором.

Алгоритмы вычисления :

1. Прямое использование формулы (29);
2. Рекуррентный алгоритм Венигера [11], состоит из следующих шагов:
3. инициализация (для ):

1. рекуррентное вычисление (для ):

где обозначает , либо ;

1. финальное вычисление:
2. Модификация Венигера. Венигер предложил расширение -преобразования, заменив *ri* в (24) на (*r*+*α*)*i* для некоторого фиксированного *α*. Это приводит к замене множителей *Jn*−1 и (*J*+*i*)*n*−1 в числителе и знаменателе (25) на (*J*+*α*)*n*−1 и (*J*+*α*+*i*)*n*−1 соответственно. Влияние параметра *α* на точность аппроксимаций требует дополнительного исследования.

-трансформация

Метод, называемый *H*-преобразованием, был предложен Хомейером [18] для ускорения сходимости рядов Фурье по синусам и косинусам. Рассмотрим это преобразование, так как оно является частным случаем GREP(2) и вариантом *d*(2)**-**преобразования.

Пусть дан ряд Фурье:

а его частичные суммы имеют вид:

Тогда приближение  к сумме этого ряда определяется через линейную систему:

где

а - некоторая фиксированная константа. Здесь ​и ​ — дополнительные вспомогательные неизвестные. Хомейер предложил эффективный рекуррентный алгоритм для реализации *H*-преобразования, отличающийся высокой экономичностью.

Однако у этого преобразования есть два недостатка [11]:

1. Ограниченное применение: класс ряд рядов Фурье, для которых метод работает успешно, довольно узок. Это видно при сравнении уравнений (30) с определяющими уравнениями для ​:

где при специальном выборе , а именно . Таким образом, ​ и ​ используют практически одинаковое количество членов ряда .

Уравнения в (30) сразу же показывают, что *H*-преобразование может быть эффективным, когда

то есть, когда  связана с функцией  Такая ситуация возможна только тогда, когда {*bn*​} и {*cn*​} оба принадлежат классу *b(1)*. Учитывая это, становится ясно, что, если хотя бы одна из последовательностей  или  ​} (или обе) принадлежат классу b(s) при , *H*-преобразование перестаёт быть эффективным. В отличие от этого, *d*(*m*)-преобразование при подходящем значении  остаётся эффективным, как упоминалось ранее.

В качестве примера рассмотрим ряд косинусов , где  — полиномы Лежандра. Поскольку , получаем, что . В этом случае:

1. *d(4)*-преобразование может быть применено напрямую к ;
2. *d(2)*-преобразование с использованием комплексного подхода также применимо и требует примерно вдвое меньше вычислений по сравнению с прямым методом;
3. *H*-преобразование неэффективно.
4. Из определения *rn*​ очевидно, что предполагается доступность *bn*​ и *cn*​. В таком случае, как объяснялось ранее, *d(1)*-преобразование с (которое является ничем иным, как преобразованием Левина) в сочетании с комплексным подходом обеспечивает требуемую точность при примерно вдвое меньших вычислительных затратах по сравнению с *H*-преобразованием, когда последнее применимо. Разумеется, лучшая устойчивость и точность достигаются при использовании *d*(1)-преобразования с APS вблизи точек сингулярности.

Заключение

Полученные преобразования могут быть применены к широкому классу последовательностей, включая, среди прочего, линейные и общие линейные последовательности, где обычно применяется эпсилон-алгоритм. Они были созданы на основе строгого анализа асимптотических разложений хвостов бесконечных рядов. В некоторых частных случаях приближения, полученные с помощью *d(m)*-преобразования, совпадают с теми, которые даёт преобразование Шенкса.

Частные случаи *d(1)-*трансформации - *–*преобразование Левина и 𝒮*-*преобразованиеСиди обладают схожими с *t*-, *u*- и *v*-преобразованиями численными свойствами, за исключением их меньшей эффективности для логарифмических последовательностей. 𝒮 -преобразование будет более эффективно по сравнению с -преобразованием для последовательностей из классов линейных и факториальных. А для знакопеременных рядов – наоборот, фаворитом будет -преобразование.

Список литературы

1. Rational approximants defined from double power series // Math. Comp. // J. S. R. Chisholm. – 1973. – P. 941-848.
2. General Rational approximants in N variables // Approx. Theory // D. Levin. – 1976. – P. 1-8.
3. On accelerating the convergence of infinite double series and integrals // Math. Comp. // D. Levin. – 1980. – P. 1331-1980.
4. The d(2)-transformation for infinite double series and the D(2)-transformation for infinite double integrals. // Math. Comp. – 1998. – P. 695-714.
5. Extrapolation Methods for infinite multiple series and integrals // Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering vol. 1. // D. Levin, A. Sidi – 2001. – P. 167-184.
6. Two new classes of nonlinear transformations for accelerating the convergence of infinite integrals and series // Appl. Math. Comp. // D. Levin, A. Sidi – 1975. – P. 175-215.
7. Further convergence and stability results for the generalized Richardson extrapolation process GREP(1) with and application to the D(1)-transformation for infinite integrals // Comp. Appl. Math. // A. Sidi. – 1999. – P. 153-167.
8. An algorithm for a generalization of the Richardson extrapolation process // SIAM J. Numer. Anal. // W. F. Ford and A. Sidi. – 1987. – P. 1212-1232.
9. Exponential function approximation to Laplace transform inversion and development of non-linear methods for accelerating the convergence of infinite integrals and series // PhD thesis, Tel Aviv University // I. M. Longman. – 1977.
10. Development of non-linear transformations for improving convergence of sequences // Math. Comp. // D. Levin. – 1975. – P. 371-388, 1331-1345.
11. Practical Extrapolation Methods: Theory and Applications // Cambridge University Press // A. Sidi – 2003. – P. 121-157, 238-250, 253-261, 363-371.
12. An algorithm for a special case of a generalization of the Richardson extrapolation process // Numer. Math. // A. Sidi. – 1982. – P. 223-233.
13. Acceleration of linear and logarithmic convergence // SIAM J. Numer. Anal. // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1979. – P. 223-240.
14. Numerical comparisons of nonlinear convergence accelerators // Math. Comp. // D. A. Smith, W. F. Ford. – 1982. – P. 481-499.
15. A new method for deriving Pade approximants for some hypergeometric functions // J. Comp. Appl. Math. // A. Sidi. – 1981. – P. 37-40.
16. A Maple package for transforming sequences and functions // Comput. Phys. Comm. // J. Grotendorst. – 1991. – P. 325-342.
17. A Levin-type algorithm for accelerating the convergence of Fourier series // Numer. Algorithms // H. H. H. Homeier. – 1992. – P. 245-254.