d(m)-трансформация

Теорема. Пусть последовательность , и пусть сходится с *s*, предположим также, что

и что

где

Тогда

для некоторых чисел , и функций .

Так как , то они имеют асимптотическое расширение вида:

Важным условием в данной теореме является принадлежность последовательности к множеству , если , и даёт асимптотическое расширение для .

Сопоставим ,, однако для того, чтобы применить GREP требуется решить следующую проблему: числа зависят от разностного уравнения, которое мы не знаем; незнание приводит нас к тому, что мы не знаем о . Её решить очень просто, мы заменяем на верхний предел, т.е. на :

Причём функции и

По итогу получаем, что у нас есть новые , которые легко выражаются через члены ряда и не требуют знания чисел .

Добавим к обоим частям, чтобы привести к удобному виду:

, потому асимптотическое расширение той же формы, что и :

Расширим функции отрицательными степенями , где – константа.

Асимптотическое расширение тогда предполагает форму:

На основе асимптотического расширения , можно дать определение d-трансформации Левина-Сиди для аппроксимации суммы бесконечного ряда.

Возьмём последовательность целых чисел

Пусть . Тогда аппроксимации к *S* определены линейной системой:

– параметр, которым мы можем изменять – дополнительные *N* неизвестных.

Аналогичную трансформацию можно получить для факториального ряда, если переписать асимптотическое расширение при помощи символов Почхаммера:

Можно получить факториальную d(m)-трансформацию:

Полученная трансформация есть ничто иное как GREP, только для бесконечных рядов и последовательностей. У d(m)-трансформации есть несколько особенностей:

1. для трансформации необходимо определить число m;
2. так как мы свободны выбирать числа то мы можем их использовать как для улучшения ускорения сходимости, так и для численной стабильности; это огромное преимущество этой трансформации;
3. из того, как мы определили d(m)-трансформацию, следует, что трансформация не зависит от принадлежности последовательности к, поэтому трансформацию можно использовать и для последовательностей не из класса, однако тогда мы полностью зависим от асимптотического поведения ;
4. несмотря на нагромождённый вид формулы для d(m)-трансформации, её можно имплементировать, используя весьма эффективные алгоритмы – например, W-алгоритм, если , и W(m)-алгоритм, если .

Частные случаи d(1)-трансформации

*– трансформация*. Если выбрать в формуле для d(1)-трансформации, то мы получим  *–*трансформацию:

Получим:

Перепишем в другом виде:

Наибольшая степень n в правой части равна *k*-1 Многочлен степени *k*-1 от *n* будет обнулён оператором . Поскольку оператор разности линеен равенство принимает форму:

Благодаря формуле для :

– множитель, введённый в формулу, чтобы уменьшить магнитуду слагаемых числителя и знаменателя чтобы понизить риск возникновения ошибки переполнения.

Данная формула удобна так как из неё легко выводится рекуррентное отношение.

Пусть

Для стабильности лучше вычислять уменьшенные значения:

Используя минимизированные значения, получается рекуррентное отношение формы:

𝒮 *– трансформация*. Если в факториальной d(1)-трансформации мы выбираем , то получаем трансформацию

Перепишем в другом виде:

Применим к обоим частям оператор, действующий на *n*:

Используя линейность оператора , получаем:

Применяя формулу для оператора получаем репрезентацию 𝒮 в виде отношения двух конечных сумм:

Множитель был введён для того, чтобы уменьшить порядок слагаемых в сумме, тем самым снизив риск возникновения при вычислении ошибки переполнения 𝒮. Можно также вычислить, используя рекуррентное отношение, полученное из выведенной ниже формулы.

Числитель и частное имеют форму:

Такое соотношение работает для:

Если же используется более численно стабильная версия, т.е.

То рекурсивное отношение принимает вид: