Введение

Проблема ускорения сходимости бесконечных кратных рядов и интегралов с помощью методов экстраполяции в последнее время вызывает значительный интерес. Первая работа по ускорению сходимости кратных рядов была опубликована Чизхолмом [1]. В этой работе Чизхолм определил диагональные аппроксиманты Паде для двойных рядов вида . Рассматриваемые в [1] «диагональные» аппроксиманты имеют вид . Недиагональные аппроксиманты  были позднее определены Грейвсом-Моррисом, Хьюзом Джонсом и Мейкинсоном. Диагональные аппроксиманты из [1] были обобщены на степенные ряды от *N* переменных Чизхолмом и Макьюэном, а недиагональные аппроксиманты из были обобщены на *N* переменных Хьюзом Джонсом. Аппроксиманты Паде общего порядка для кратных степенных рядов были определены Левиным [2] и далее развиты Кайтом.

Общее обсуждение ускорения сходимости бесконечных двойных рядов и интегралов было представлено в работе Левина [3]. Cтатья Грайфа и Левина [4] объединяет общую идею из [3] с подходом, основанным на *D*-преобразовании для одномерных бесконечных интегралов и *d*-преобразовании для одномерных бесконечных рядов, предложенных Левиным и Сиди. Ранее, Сиди уже предложил подход, в котором *d*-преобразование используется последовательно для суммирования кратных рядов. Тот же подход может быть применен для вычисления кратных интегралов с бесконечными пределами.

Рассмотрим некоторые детали подхода, основанного на асимптотических разложениях и обобщенном процессе экстраполяции Ричардсона, которые приводят к *D*- и *d*-преобразованиям

*D(m)*-трансформациядля одномерных бесконечных интегралов

Обсудим *D*-преобразование для интегралов с бесконечными пределами. Начнем с определения двух классов функций, которые мы обозначаем *A(γ)* и *B(m)*.

Определение [5]: функция *α*(*x*) принадлежит множеству *A(γ)*, если она бесконечно дифференцируема для всех  и имеет асимптотическое разложение типа Пуанкаре вида:

а её производные имеют асимптотические разложения, полученные формальным почленным дифференцированием разложения (1).

Если, кроме того,  в (1), то говорят, что *α(x)* строго принадлежит *A(γ)*. Здесь *γ* в общем случае комплексное.

Определение [5]: функция *f(x),* бесконечно дифференцируемая на (*a*, ∞), принадлежит множеству *B(m)*, если она удовлетворяет линейному однородному обыкновенному дифференциальному уравнению (ОДУ) порядка *m*:

где

Следующая теорема, приведенная в [6], является основой для *D*-преобразования.

Теорема: пусть *f*(*x*) — функция из *B(m)*, интегрируемая на бесконечности. Предположим также, что:

и что

где

Определим:

Тогда:

где – целые числа, а

Если, кроме того, строго для некоторых чисел , то:

Равенство в (8) достигается, когда целые числа, среди которых берется максимум, различны.

Наконец, поскольку , они имеют асимптотическое разложение вида:

Важно:

1. если c , то , и условие невырожденности выполняется автоматически;
2. всегда ;
3. для выполняется точное равенство ;
4. в большинстве примеров равенство выполняется для всех *k*;
5. параметры и функции зависят только от в ОДУ и одинаковы для всех решений *f*(x), удовлетворяющих условиям теоремы.

Аналогия с GREP [5]:

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. .

Определение [5]: выберем возрастающую последовательность , стремящуюся к бесконечности. Пусть – вектор неотрицательных целых чисел. Тогда приближение к определяется системой уравнений:

Здесь представляют собой дополнительные (*N*) вспомогательные неизвестные. В формуле (10) принято, что , поэтому . Этот обобщённый процесс экстраполяции Ричардсона (GREP), генерирующий ​, мы будем называть *D*(*m*)-преобразованием или просто *D*-преобразованием.

Данное определение *D*-преобразования было дано в [25] и отличается от оригинального определения из [13] тем, что мы заменили  их известными верхними границами *k*+1. Поскольку это не требует знания точных значений , метод становится более удобным для пользователя. Однако если нам известны точные значения  или их верхние границы, следует использовать их и заменить  в (10) на , так как это снижает вычислительные затраты при заданном уровне точности. В некоторых важных случаях, связанных с интегральными преобразованиями, значения   могут быть легко определены.

Для применения *D*(*m*)-преобразования необходимо определить значение *m*. Это можно сделать одним из двух способов:

1. методом проб и ошибок – начать тест с *m*=1, и увеличивать m до достижения удовлетворительного ускорения сходимости;
2. математической оценкой – использовать эмпирические правила: если , то:
3. ;

Если *f*(*x*) и/или некоторые её производные бесконечное число раз обращаются в ноль на бесконечности, можно соответствующим образом выбрать точки , чтобы исключить некоторые члены  из (7). Это сокращает вычислительные затраты и повышает численную устойчивость. Данный подход был предложен в работах Сиди. Полученные методы обозначаются как -преобразования. Альтернативный подход - -преобразование является одним из наиболее эффективных методов для вычисления осциллирующих бесконечных интегралов.

*d*(*m*)-преобразование для одномерных бесконечных рядов

….

////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////////

и что

где

Тогда

для некоторых чисел , и функций .

Так как , то они имеют асимптотическое расширение вида:

Важным условием в данной теореме является принадлежность последовательности к множеству , если , и даёт асимптотическое расширение для .

Сопоставим ,, однако для того, чтобы применить GREP требуется решить следующую проблему: числа зависят от разностного уравнения, которое мы не знаем; незнание приводит нас к тому, что мы не знаем о . Её решить очень просто, мы заменяем на верхний предел, т.е. на :

Причём функции и

По итогу получаем, что у нас есть новые , которые легко выражаются через члены ряда и не требуют знания чисел .

Добавим к обоим частям, чтобы привести к удобному виду:

, потому асимптотическое расширение той же формы, что и :

Расширим функции отрицательными степенями , где – константа.

Асимптотическое расширение тогда предполагает форму:

На основе асимптотического расширения , можно дать определение d-трансформации Левина-Сиди для аппроксимации суммы бесконечного ряда.

Возьмём последовательность целых чисел

Пусть . Тогда аппроксимации к *S* определены линейной системой:

– параметр, которым мы можем изменять – дополнительные *N* неизвестных.

Аналогичную трансформацию можно получить для факториального ряда, если переписать асимптотическое расширение при помощи символов Почхаммера:

Можно получить факториальную d(m)-трансформацию:

Полученная трансформация есть ничто иное как GREP, только для бесконечных рядов и последовательностей. У d(m)-трансформации есть несколько особенностей:

1. для трансформации необходимо определить число m;
2. так как мы свободны выбирать числа то мы можем их использовать как для улучшения ускорения сходимости, так и для численной стабильности; это огромное преимущество этой трансформации;
3. из того, как мы определили d(m)-трансформацию, следует, что трансформация не зависит от принадлежности последовательности к, поэтому трансформацию можно использовать и для последовательностей не из класса, однако тогда мы полностью зависим от асимптотического поведения ;
4. несмотря на нагромождённый вид формулы для d(m)-трансформации, её можно имплементировать, используя весьма эффективные алгоритмы – например, W-алгоритм, если , и W(m)-алгоритм, если .

Частные случаи d(1)-трансформации

*– трансформация*. Если выбрать в формуле для d(1)-трансформации, то мы получим  *–*трансформацию:

Получим:

Перепишем в другом виде:

Наибольшая степень n в правой части равна *k*-1 Многочлен степени *k*-1 от *n* будет обнулён оператором . Поскольку оператор разности линеен равенство принимает форму:

Благодаря формуле для :

– множитель, введённый в формулу, чтобы уменьшить магнитуду слагаемых числителя и знаменателя чтобы понизить риск возникновения ошибки переполнения.

Данная формула удобна так как из неё легко выводится рекуррентное отношение.

Пусть

Для стабильности лучше вычислять уменьшенные значения:

Используя минимизированные значения, получается рекуррентное отношение формы:

𝒮 *– трансформация*. Если в факториальной d(1)-трансформации мы выбираем , то получаем трансформацию

Перепишем в другом виде:

Применим к обоим частям оператор, действующий на *n*:

Используя линейность оператора , получаем:

Применяя формулу для оператора получаем репрезентацию 𝒮 в виде отношения двух конечных сумм:

Множитель был введён для того, чтобы уменьшить порядок слагаемых в сумме, тем самым снизив риск возникновения при вычислении ошибки переполнения 𝒮. Можно также вычислить, используя рекуррентное отношение, полученное из выведенной ниже формулы.

Числитель и частное имеют форму:

Такое соотношение работает для:

Если же используется более численно стабильная версия, т.е.

То рекурсивное отношение принимает вид:

Список литературы

1. Rational approximants defined from double power series // Math. Comp. // J. S. R. Chisholm. – 1973. – P. 941-848.
2. General Rational approximants in N variables // Approx. Theory // D. Levin. – 1976. – P. 1-8.
3. On accelerating the convergence of infinite double series and integrals // Math. Comp. // D. Levin. – 1980. – P. 1331-1980.
4. The d(2)-transformation for infinite double series and the D(2)-transformation for infinite double integrals. // Math. Comp. – 1998. – P. 695-714.
5. Extrapolation Methods for infinite multiple series and integrals // Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering vol. 1. // D. Levin, A. Sidi – 2001. – P. 167-184.
6. Two new classes of nonlinear transformations for accelerating the convergence of infinite integrals and series // Appl. Math. Comp. // D. Levin, A. Sidi – 1975. – P. 175-215.
7. Further convergence and stability results for the generalized Richardson extrapolation process GREP(1) with and application to the D(1)-transformation for infinite integrals // Comp. Appl. Math. // A. Sidi. – 1999. – P. 153-167.